Slovenská technická univerzita
v Bratislave
Stavebná fakulta

SVOČ 2011

Využitie metód evolúcie plôch v softvéri pre obuvnícky priemysel

Meno Priezvisko študenta:	Martin Tunega
Ročník a program/odbor štúdia:	5. ročník štúdia MPM
Vedúci práce:	Prof. RNDr. Mikula Karol, DrSc.
Katedra:	KMaDG

Ústí nad Labem 25. - 27. Máj 2011

Anotácia:
V práci zadefinujeme metódu konečných objemov na numerické riešenie parabolických parciálnych diferenciálnych rovníc pre pohyb plochy, ktorá v našom prípade rezprezentuje povrch obuvníckeho kopyta. Metóda je založená na aproximácii povrchu konečným počtom trojuholníkov a vytvorení slabej formulácie pre Laplace-Beltramiho operátor na tomto povrchu. Numerickou aproximáciou slabej formulácie dostaneme lineárny systém rovníc pre hodnoty riešenia na jednotlivých konečných objemoch, ktorý dokážeme efektívne vyriešit iteračnou numerickou metódou v každom diskrétnom časovom kroku. V našom prípade je počiatočná podmienka daná začiatočným tvarom obuvníckeho kopyta, ktorého body sa v čase hýbu v smere vektora strednej krivosti. Plocha kopyta sa takto pri vhodne zvolených okrajových podmienkach spojite 'premietne' do roviny. Takýto priemet je nevyhnutný pre správne nanesenie textúry na jeho povrch.

Annotation:
In this work we define a surface finite volume method for the numerical solution of parabolic partial differential equations on manifold which in our case represents surface of the shoelast. The main idea is based on approximation of the surface by finite number of triangles and construction of a weak formulation for the Laplace-Beltrami operator on the manifold. By the finite volume approximation of the weak formulation we obtain a system of linear equations which can be efficiently solved in each discrete time step by an iterative solver. In our application the initial condition is given by the initial shape of the shoelast which is evolving in time by the influence of its mean curvature. For suitably chosen boundary conditions the surface of the shoelast continuously translates into the plane. This 'projection' is necessary for a proper texture mapping onto the surface.

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

Bratislava 13. 4. 2011 .....

Vlastnoručný podpis

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu práce Prof. RNDr. Karolovi Mikulovi, DrSc., za cenné rady, odbornú pomoc a konzultácie, ktoré mi poskytol pri vypracovaní práce a takisto ďakujem RNDr. Lubomírovi Dižovi z firmy Wing, s.r.o. Partizánske za poskytnutie dát obuvníckeho kopyta a prípravu vhodného formátu dát pre náš algoritmus.

1 Úvod

Povrchy, ktoré prirodzeným spôsobom minimalizujú svoj povrch boli predmetom už mnohých štúdií. Ide hlavne o povrchy, ktoré sú vplyvom povrchového napätia nútené zaujať stav s minimálnou potencionálnou energiou. Takéto povrchy sú napríklad tenká vrstva mydlovej vody, mydlová bublina, štruktúra buniek. V tejto práci sa budeme venovať evolúcii topánkovej plochy v smere strednej krivosti. Vektor strednej krivosti $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ pre bod $\mathbf{x} \in \omega$ môžeme chápať ako vektor sily pôsobiacej v dôsledku povrchového napätia v danom bode. Pre vhodné okrajové podmienky budú v rovnovážnom stave všetky body tejto plochy ležať v jednej rovine. Takýto priemet 3D plochy do 2D je potrebný v počítačovej grafike pre správne "nanesenie"textúry na 3D teleso.

2 Matematický model

Diferenciálna rovnica, ktorá popisuje pohyb ľubovolnej súvislej a hladkej plochy $\omega \subset \mathbf{R}^3$ závislý od krivosti má v našom prípade nasledujúci tvar

$$\partial_t \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) - \Delta_s \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = 0, t \in [0, T], \tag{1}$$

pričom uvažujeme počiatočnú podmienku

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{r}_0(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Riešením je vektorová funkcia $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, ktorá popisuje plochu ω. Rovnicu riešime na ploche ω, kde $\mathbf{x} \in \omega$ predstavuje priestorovú premennú, $t \in [0, T]$ čas a Δ_s je Laplace-Beltramiho operátor, ktorý predstavuje zovšeobecnený Laplaceov operátor na zakrivenom povrchu ω. Rovnicu budeme riešiť numericky, metódou konečných objemov tak ako bola prezentovaná v [5] a [6].

Časovú os $[0, T]$ môžeme rozdeliť na konečný počet bodov t_k, $k = 0, \ldots, K$, ktoré budú od seba vzdialené o časový interval $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, \ldots, K$. Potom funkcia $\mathbf{r}(t_k)$ bude reprezentovať riešenie na k-tej časovej vrstve. Časovú deriváciu $\partial_t \mathbf{r}(t)$ aproximujeme spätnou diferenciou

$$\partial_t \mathbf{r}(t) \approx \frac{\mathbf{r}^k - \mathbf{r}^{k-1}}{\tau_k}, k = 1, \ldots, K. \tag{3}$$

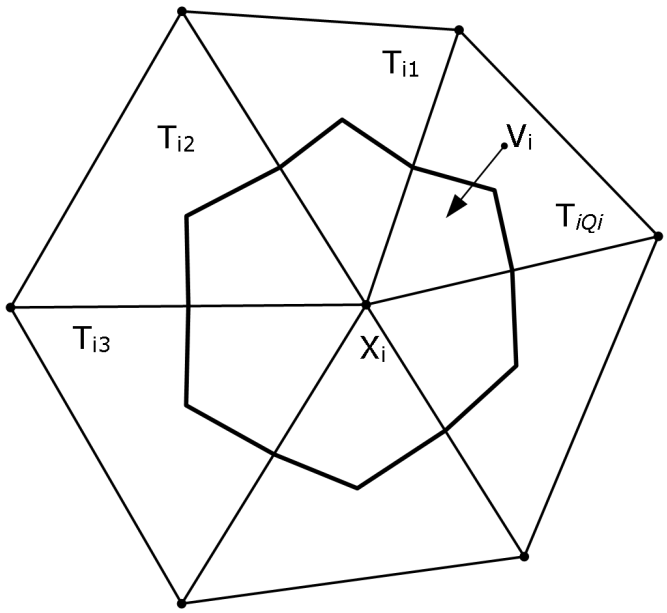
Pre sprehladnenie zavedieme označenie $\mathbf{r}(t_k) = \mathbf{r}^k$.

2.1 Slabá formulácia úlohy a jej numerická aproximácia

Hlavná myšlienka je založená na aproximácii plochy ω konečným počtom trojuholníkov, pomocou ktorých zostrojíme systém konečných objemov. Využijeme Greenovu vetu pre Laplace-Belramiho operátor na zadefinovanie slabej formulácie difúznej rovnice na konečnom objeme. Numerickou aproximáciou slabej formulácie dostaneme lineárny systém rovníc

pre hodnoty riešenia na jednotlivých konečných objemoch, ktorý vieme efektívne vyriešiť numerickou metódou.

Sieť bodov X_i $i = 1, \ldots, N$ a im prislúchajúce trojuholníky T_{iq} $q = 1, \ldots, Q_i$ máme dané. Číslo Q_i reprezentuje počet trojuholníkov, ktoré majú vrchol v bode X_i. Pre každý bod X_i zadefinujeme konečný objem V_i ako mnohouholník, ktorého vrcholy budú vždy v ťažiskách trojuholníkov a v polovici spojnice bodu X_i a jeho susedov (Obrázok 1).



Obr. 1: Konečný objem V_i

Rovnicu (1), ktorá má tvar

$$\partial_t \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) - \Delta_s \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{4}$$

zintegrujeme na konečnom objeme V_i [3],

$$\int_{V_i} \partial_t \mathbf{r} \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{V_i} \Delta_s \mathbf{r} \mathrm{d}\mathbf{x} = 0, \tag{5}$$

využijeme Greenovu vetu [4] a dostaneme

$$\int_{V_i} \partial_t \mathbf{r} \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial V_i} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_i \mathrm{d}s = 0, \tag{6}$$

kde vektor $\vec{\eta}_i$ predstavuje vektor jednotkovej vonkajšej normály ku hranici konečného objemu V_i a $\nabla_s \mathbf{r} = \mathbf{r}[\nabla_s x(t), \nabla_s y(t), \nabla_s z(t)]$ povrchový gradient zložiek vektorovej funkcie $\mathbf{r}$ na ploche ω.

Z geometrie V_i vyplýva, že druhý člen môžeme zapísať ako sumu cez jednotlivé časti ∂V_i a dostaneme tak slabú formuláciu úlohy na konečnom objeme V_i:

$$\int_{V_i} \partial_t \mathbf{r} \mathrm{d}\mathbf{x} - \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{iq} \mathrm{d}s = 0, \tag{7}$$

kde $\vec{\eta}_{iq}$ predstavujú normály ku častiam hranice ∂V_{iq} (Obrázok 2). Prvý člen rovnice (7) aproximujeme spätnou diferenciou (3) a pri jeho numerickej aproximácii na konečnom objeme V_i uvažujeme konštantnú reprezentáciu riešenia danú $\mathbf{r}_i^k$ v bode X_i a časovom kroku k. Ak v druhom člene rovnice (7) uvažujeme riešenia na časovej vrstve k, dostaneme

$$m(V_i) \frac{\mathbf{r}_i^k - \mathbf{r}_i^{k-1}}{\tau_k} - \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}} \nabla_s \mathbf{r}^k \cdot \vec{\eta}_{iq} \mathrm{d}s = 0, \tag{8}$$

kde $m(V_i)$ predstavuje mieru množiny V_i, v našom prípade plochu konečného objemu V_i.

Pri numerickej aproximácii druhého člena rovnice (8) uvažujeme lineárnu reprezentáciu riešenia $\mathbf{r}^k$ na jednotlivých trojuholníkoch, ktorých časti tvoria konečný objem V_i. V takom prípade je povrchový gradient konštantný a teda rovný svojej strednej hodnote, ktorú označíme $P_{T_{iq}}^k$. Potom

$$\nabla_s \mathbf{r}^k \approx P_{T_{iq}}^k = \frac{1}{m(T_{iq})} \int_{T_{iq}} \nabla_s \mathbf{r}^k \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{9}$$

kde $m(T_{iq})$ predstavuje plochu trojuholníka T_{iq}. Využitím Greenovej vety dostaneme

$$P_{T_{iq}}^k = \frac{1}{m(T_{iq})} \int_{\partial T_{iq}} \mathbf{r}^k \vec{n}_{iq} \mathrm{d}s, \tag{10}$$

kde $\vec{n}_{iq}$ predstavuje vektor jednotkovej normály na hranu trojuholníka T_{iq} (Obrázok 2). Pri lineárnej reprezentácii riešenia môžene tento integrál vypočítať ako súčet priemerov hodnôt riešenia na jednotlivých stranách a dostaneme

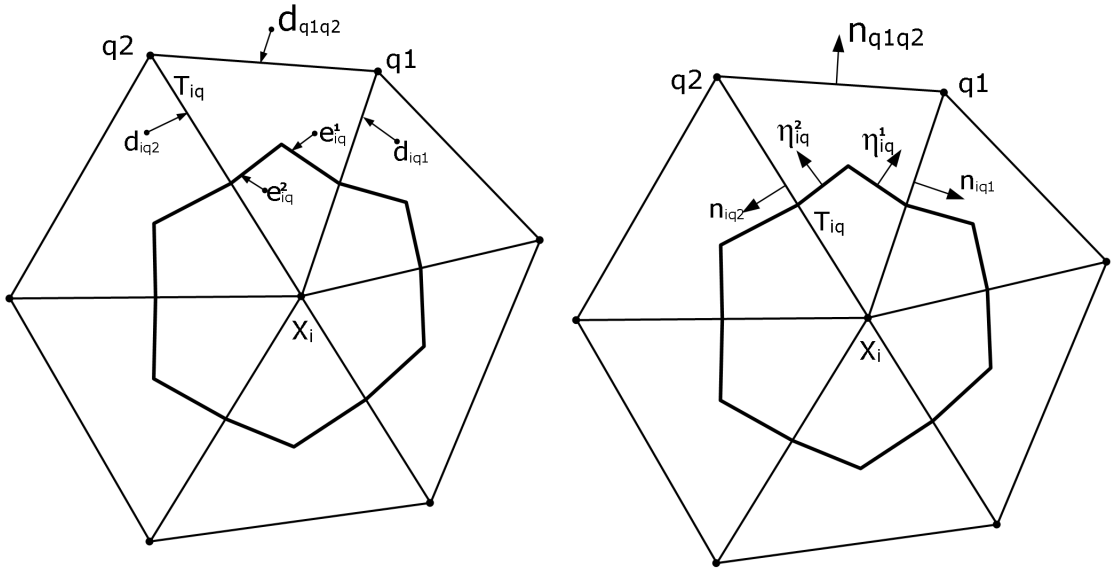
$$P_{T_{iq}}^k = \frac{1}{m(T_{iq})} \left(\frac{\mathbf{r}_i^k + \mathbf{r}_{q1}^k}{2} d_{iq1} \vec{n}_{iq1} + \frac{\mathbf{r}_i^k + \mathbf{r}_{q2}^k}{2} d_{iq2} \vec{n}_{iq2} + \frac{\mathbf{r}_{q1}^k + \mathbf{r}_{q2}^k}{2} d_{q1q2} \vec{n}_{q1q2} \right), \tag{11}$$

kde d_{iq1}, d_{iq2}, d_{q1q2} sú dĺžky strán trojuholníka T_{iq} a $\mathbf{r}_{q1}^k$, $\mathbf{r}_{q2}^k$ sú hodnoty riešenia v bodoch $q1$, $q2$ trojuholníka T_{iq} (Obrázok 2). Rovnicu (8) môžeme potom zapísať v tvare

$$m(V_i) \frac{\mathbf{r}_i^k - \mathbf{r}_i^{k-1}}{\tau_k} - \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}} P_{T_{iq}}^k \cdot \vec{\eta}_{iq} \mathrm{d}s = 0. \tag{12}$$

Konštantný vektor $P^k_{T_{iq}}$ môžeme vybrať pred integrál a $\int_{\partial V_{iq}} \vec{\eta}_{iq} \mathrm{d}s$ vyjadriť ako $(m(e^1_{iq})\vec{\eta}^1_{iq} + m(e^2_{iq})\vec{\eta}^2_{iq})$, kde $m(e^1_{iq})$, $m(e^2_{iq})$ sú dĺžky príslušných hrán. Potom naša numerická aproximácia má tvar

$$m(V_i)\frac{\mathbf{r}^k_i - \mathbf{r}^{k-1}_i}{\tau_k} - \sum_{q=1}^{Q_i}(m(e^1_{iq})\vec{\eta}^1_{iq} \cdot P^k_{T_{iq}} + m(e^2_{iq})\vec{\eta}^2_{iq} \cdot P^k_{T_{iq}}) = 0. \tag{13}$$



Obr. 2: Parametre končného objemu V_i

Úpravou rovnice (13) dostaneme lineárny systém pre x,y,z súradnice bodov X_i

$$\mathbf{r}^k_i - \frac{\tau_k}{m(V_i)}\sum_{q=1}^{Q_i}(m(e^1_{iq})\vec{\eta}^1_{iq} \cdot P^k_{T_{iq}} + m(e^2_{iq})\vec{\eta}^2_{iq} \cdot P^k_{T_{iq}}) = \mathbf{r}^{k-1}_i. \tag{14}$$

Vzhladom na tvar P^k_{iq}, v rovnici pre uzlový bod X_i vystupujú neznáme hodnoty $\mathbf{r}^k_i$ a $\mathbf{r}^k_{q1}$, $\mathbf{r}^k_{q2}$, $q = 1, \ldots, Q_i$ pre všetkých susedov uzlového bodu X_i. Členy $\mathbf{r}^k_i$, $\mathbf{r}^k_{q1}$ a $\mathbf{r}^k_{q2}$ reprezentujú lokálne označenie neznámych na trojuholníkoch T_{iq}. Pretože meníme v čase geometriu triangulizácie sú všetky parametre súvisiace s triangulizáciou plochy závislé od času a sú brané z predchádzajúceho časového kroku a mali by mať horný index $k-1$. Pre zprehladnenie sme toto označenie neuvádzali. Tým pádom je nami odvodená schéma semi-implicitná.

V rovnici pre každý uzlový bod X_i, $i = 1, \ldots, N$, budeme mať teda $Q_i + 1$ neznámych $\mathbf{r}^k_i, \mathbf{r}^k_{i1}, \ldots, \mathbf{r}^k_{iQ_i}$. Z rovnice (14) si vyjmeme členy, ktoré stoja pri $\mathbf{r}^k_i, \mathbf{r}^k_{i1}, \ldots, \mathbf{r}^k_{iQ_i}$ a nazveme ich $a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{iQ_i}$. Tieto čísla budú tvoriť nenulové prvky i-teho riadku matice $\mathbf{A}$ rozmeru

$N \times N$. Členy $a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{iQ_i}$ budeme ukladať do stĺpcov podľa globálneho číslovania neznámej, ktorej prislúchajú. Vektor pravej strany b bude daný vektorom riešenia $\mathbf{r}_i^{k-1}$ z predchádzajúceho časového kroku $k-1$.

Pre každý čas k, $k = 1, \ldots, K$ riešime tri lineárne systémy

$$\mathbf{A}x^k = x^{k-1}$$
$$\mathbf{A}y^k = y^{k-1}$$
$$\mathbf{A}z^k = z^{k-1}$$

pričom $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}[x^0, y^0, z^0]$ predstavuje počiatočnú podmienku. Pre dostatočne veľké K dospejeme k rovnovážnemu stavu, v ktorom je krivosť plochy ω minimálna.

Môžeme si všimnúť, že pre krivostnú rovnicu na ploche ω koeficienty matice $\mathbf{A}$ závisia od času a vplyv má tiež diskretizácia geometrie povrchu ω a velkosť časového kroku τ_k. Pretože chceme lineárne systémy riešiť SOR algoritmom matica musí byť diagonálne dominantná. Čiže absolútna hodnota diagonálneho člena musí byť väčšia alebo rovná sume absolútnych hodnôt nediagonálnych členov v danom riadku,

$$|\mathbf{A}_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |\mathbf{A}_{ij}| \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{15}$$

Experimentálna skúsenosť ukazuje, že pri voľbe

$$\tau_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} m(V_i) \tag{16}$$

je táto podmienka splnená a SOR metóda konverguje. Pre takúto volbu τ_k najskôr otestujeme podmienku (15) a pri jej splnení riešime lineárny systém SOR algoritmom. Pokiaľ by (15) nebola splnená zmenšili by sme τ_k na polovicu a vykonali test znova. Je dôležité si všimnúť, že pri evolúcii plochy v čase meníme polohy jednotlivých bodov X_i, preto je nutné zvoliť nový časový krok τ_k po každej časovej iterácii.

3 Numerické experimenty

3.1 Guľa

V tejto časti si najprv overíme správnosť schémy (14) na diskretizovanej pologuli a odhadneme rád metódy. Porovnáme presnosť metódy s analitickým riešením, z ktorého pre v čase sa meniaci polomer gule $\mathbf{r}(t)$ platí

$$\mathbf{r}_p(t) = \sqrt{(\mathbf{r}(0)^2 - 4t)}. \tag{17}$$

Z tohoto vzorca vyplýva, že za čas $t = 0.25$ bude v prípade jednotkovej gule polomer rovný 0. Na odhadnutie chyby err použijeme L_2 normu danú

$$err_N^K = \sqrt{\sum_{k=1}^{K} \tau_k \sum_{i=1}^{N} (|\mathbf{r}_p(k\tau_k)| - |\mathbf{r}_i^k|)^2 m(V_i)}. \tag{18}$$

Odhad rádu metódy je potom daný

$$EOC = \log_2 \frac{err_N^K}{err_{2N}^{2K}}. \tag{19}$$

Chyby err_N^K sme počítali v časovom intervale $[0, T]$, kde $T = 0.1$, $|\mathbf{r}(0)| = 1$, pre rôzne počty uzlových bodov K. Časový krok τ_k sme pre každú diskretizáciu volili podľa (15) a po dobu výpočtu sme ho nechali konštantný. Z tabuľky 1. vyplýva, že metóda je prvého rádu.

Tabuľka 1: Odhad rádu metódy

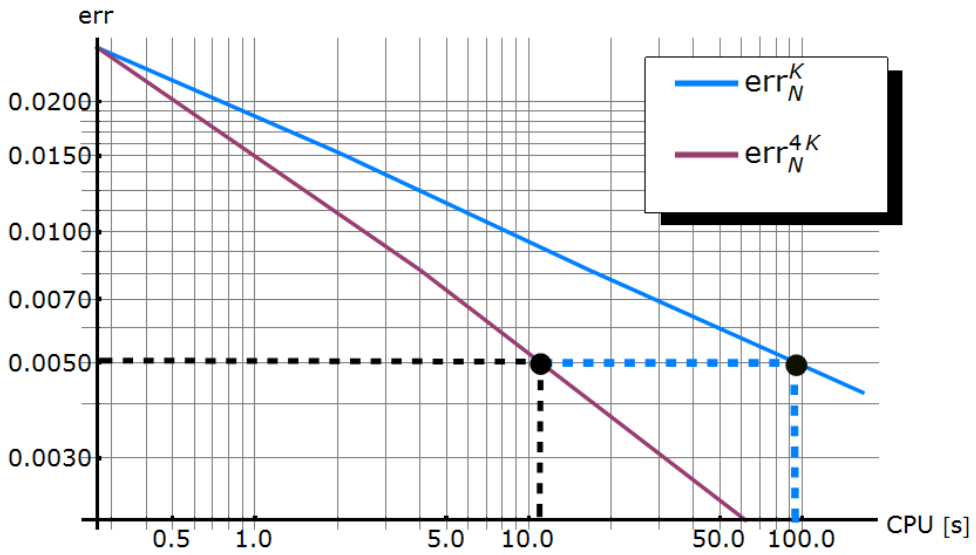
K	err_N^K	EOC	τ_k	čas výpočtu (s)
602	0.0075987495		0.020763	0.181
1178	0.0047176325	0.687698981	0.010638	0.760
2402	0.0024261229	0.959410403	0.005225	2.855
4706	0.0012204106	0.991286019	0.002668	10.254
9602	0.0006034815	1.015985165	0.001308	39.339
19496	0.000300434	1.006261454	0.000644	161.606

Tabuľka 2: Odhad rádu metódy

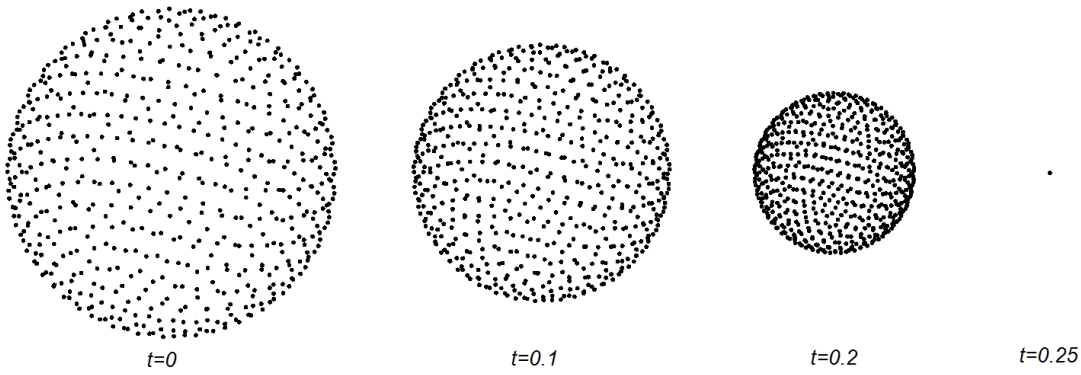
K	err_{4N}^{2K}	EOC	τ_k	čas výpočtu (s)
602	0.0103814610		0.01038146	0.367
1178	0.0023318223	2.154479	0.00531922	1.317
2402	0.0006096656	1.935367	0.00130615	9.924
4706	0.0001410474	2.111838	0.00033355	81.707

Na Obr.3 sú porovnané dva prístupy k voľbe časového kroku. V prvom prípade (modrý graf), sme volili $\tau_k \sim h$, kde h chápeme ako veličinu vyjadrujúcu dĺžku najväčšej hrany trojuholníka. Potom je plocha trojuholníka proporcionálna h^2 a teda pri rozdelení hrán na polovicu dostaneme štyri nové trojuholníky zo zhruba štvrtinovou plochou. Preto je prirodzená väzba $\tau_k \sim h^2$, t.j čas sa viaže k ploche trojuholníka. Vtedy je metóda akoby druhého rádu (Tabuľka **??**.

Z grafu (Obr.3) je zrejmé, že pri voľbe $\tau_k \sim h^2$ dostaneme rovnakú odchylku od presného riešenia $err = 0.005$ za približne 10 sekúnd. Pre voľbu $\tau_k \sim h$ by sme potrebovali približne 10 krát viac času.



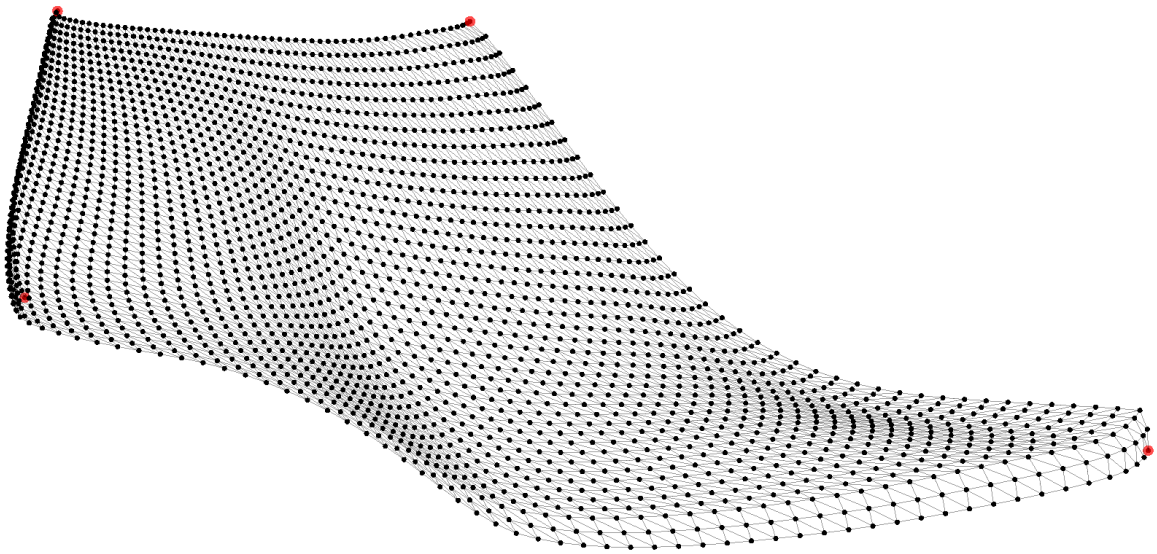
Obr. 3



Obr. 4: Evolúcia guľovej plochy podla krivosti. Počítané pre $N = 602$, $tau = 0.157$, $|\mathbf{r}(0)| = 1$ a $T = 0.25$.

3.2 Vývoj topánkovej plochy

Na záver aplikujeme rovnicu (1) na topánkovú plochu. Pretože nejde o uzavretú plochu musíme zvoliť vhodné okrajové podmienky. Našim cielom je premietnuť plochu do roviny určenú štyrmi rohovými bodmi (Obr.5).



Obr. 5: Sieť bodov, ktoré popisujú povrch topánky. Štyri červené body určujú rovinu, do ktorej chceme plochu premietnuť.

Pre tieto body zvolíme Dirichletovu okrajovú podmienku.

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}_i, t) = \mathbf{r}(\mathbf{x}_i, 0), i \in \mathbf{N}_r, \tag{20}$$

kde $\mathbf{N}_r$, je množina globálnych čísel rohových bodov.

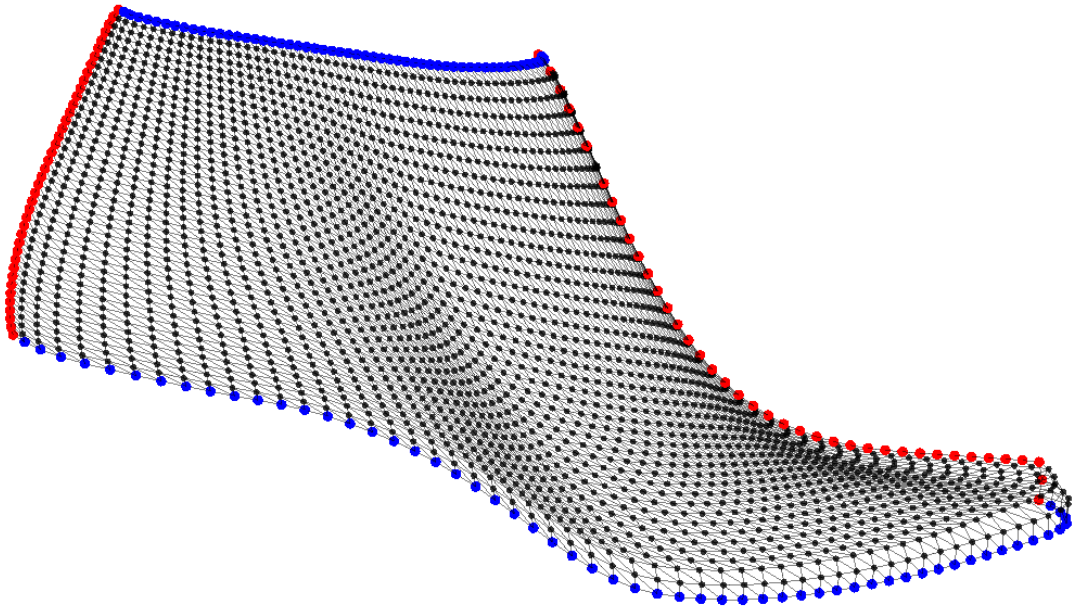
Pre ostatné krajné body máme viacero možností. Voľba okrajovej podmienky výrazne ovplyvní celkový výsledok, preto jej budeme venovať špecíalnu pozornosť. Chceme aby priemet plochy bol čo najmenej zdeformovaný, čo znamená, že body by mali byť rovnomerne rozdistribuované po celej ploche a takisto na krajných krivkách.

Môžeme im zadefinovať rovnakú Dirichletovu okrajovú podmienku, tak ako pre rohové body. To by znamenalo, že ich poloha by sa v čase nemenila, čo nieje vhodné pre horný a spodný okraj topánky. Pre tieto dve línie zvolíme špeciálnu okrajovú podmienku, ktorá zaistí, že body sa budú hýbať len v smere osi kolmej na rovinu priemetu. Pre ostatné krajné body zvolíme rovnakú Dirichletovu okrajovú podmienku tak ako pre rohové body (20).

Body topánky sme posunuli a pootočili v priestore tak, že rovina do ktorej robíme priemet je daná rovinou $y = 0$. V takomto prípade pre body vyznačené modrou farbou (Obr.6) zadefinujeme okrajovú podmienku ako

$$\mathbf{r}(x_i(t), y_i(t), z_i(t), t) = \mathbf{r}(x_i(0), y_i(t), z_i(0), t), i \in \mathbf{N}_b, \tag{21}$$

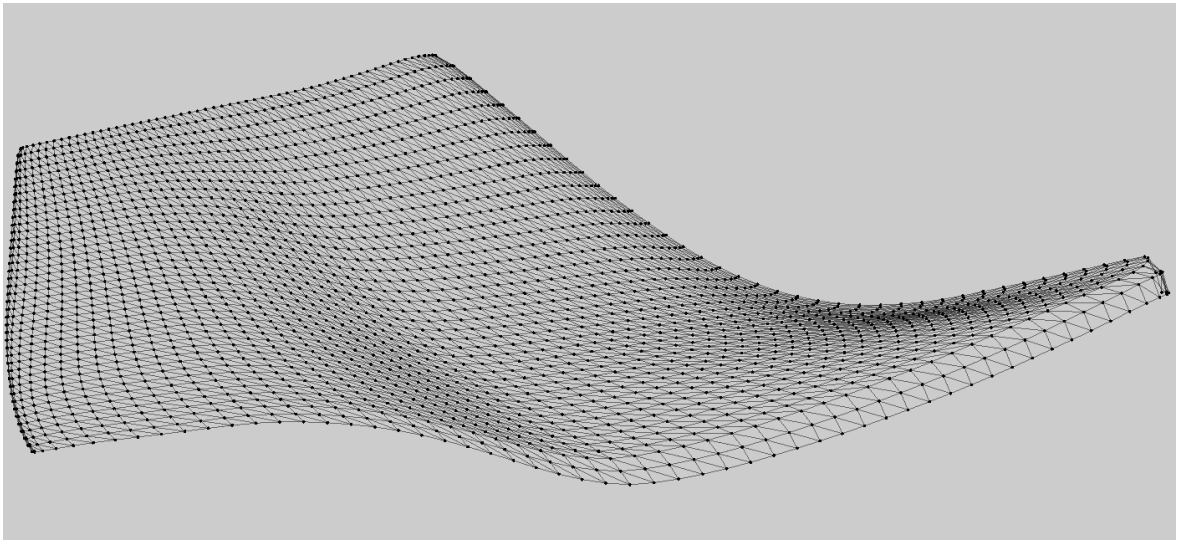
kde $\mathbf{N}_b$ je množina globálnych čísel bodov vyznačených modrou farbou (Obr.6). Tento prístup k voľbe okrajovej podmienky si môžeme predstaviť tak, že robíme priemet vektora strednej krivosti na vektor normály priemetovej roviny. Takúto okrajovú podmienku zrealizujeme velmi jednoducho, a to realizaciou SOR algoritmu len pre ypsilónovú zložku vyznačených bodov.



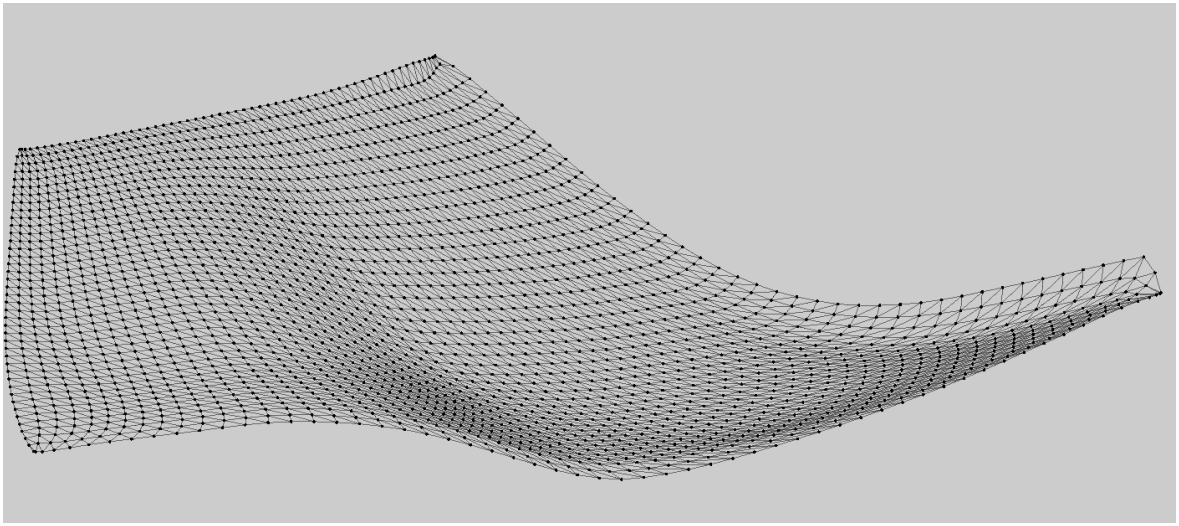
Obr. 6: Sieť bodov, ktoré popisujú povrch topánky. Pre modré body definujeme špeciálnu okrajovú podmienku. Pre červené body definujeme Dirichletovu okrajovú podmienku.

3.3 Výsledky

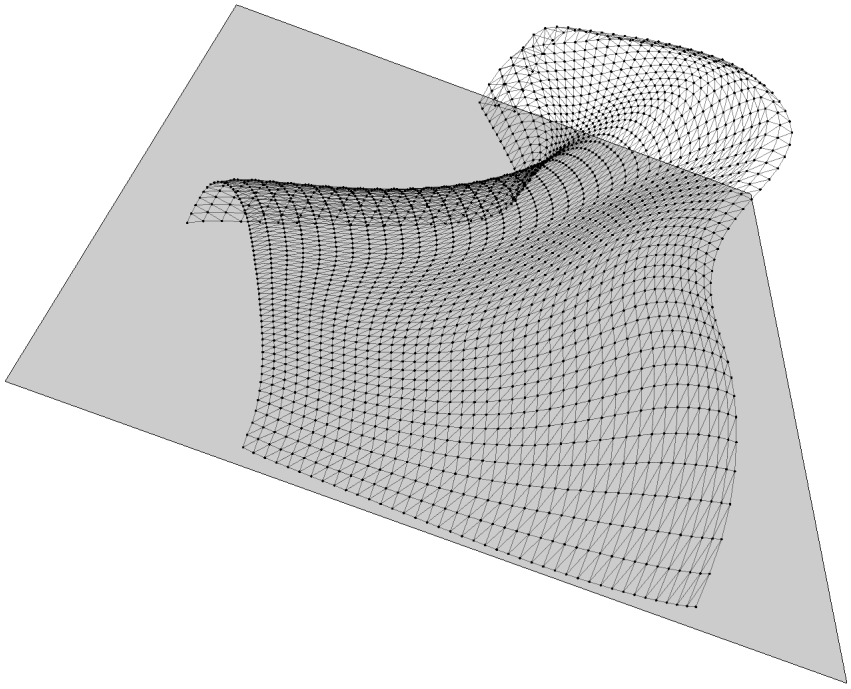
Vstupnými dátami, ktoré nám dodala firma Wing, s.r.o. Partizánske je súbor obsahujúci súradnice uzlových bodov a hrany v ktorých sa príslušný bod nachádza. Obsahom súboru sú takisto ďalšie informácie o sieti, ktoré však nie sú potrebné pre náš algoritmus. Pre nás je podstatné vytvoriť si štruktúru, ktorá nám hovorí o susednosti uzlových bodov. Numerickú schému sme testovali na topánkovej ploche, ktorá mala 2419 uzlových bodov. Pre tieto dáta sme potrebovali 2500 iterácií na premietnutie plochy do roviny. Časový krok τ_k sme volili v každom kroku podľa podmienky (15) aby sme zabezpečili stabilitu algoritmu.



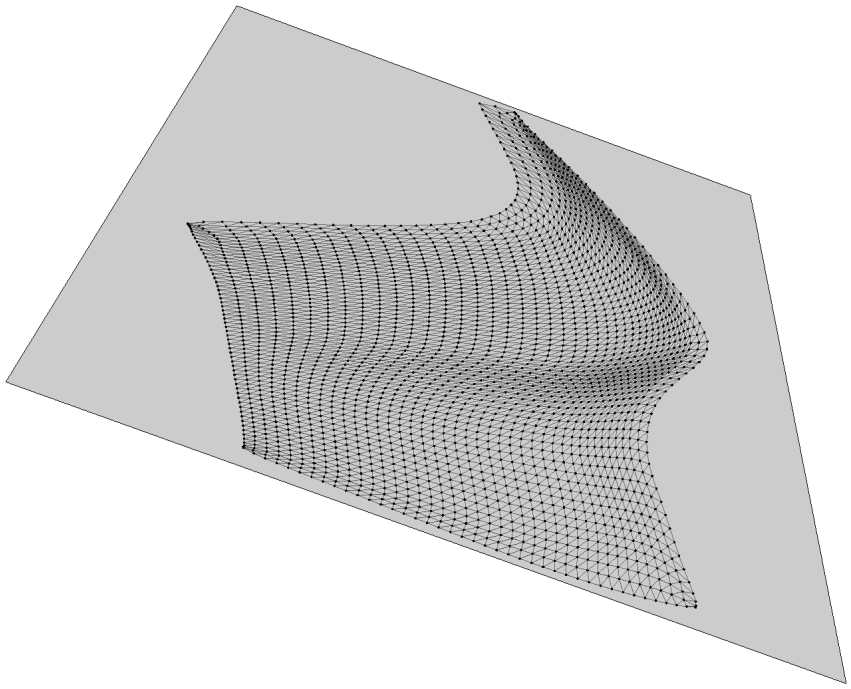
Obr. 7: Sieť bodov v čase $T = 0$.



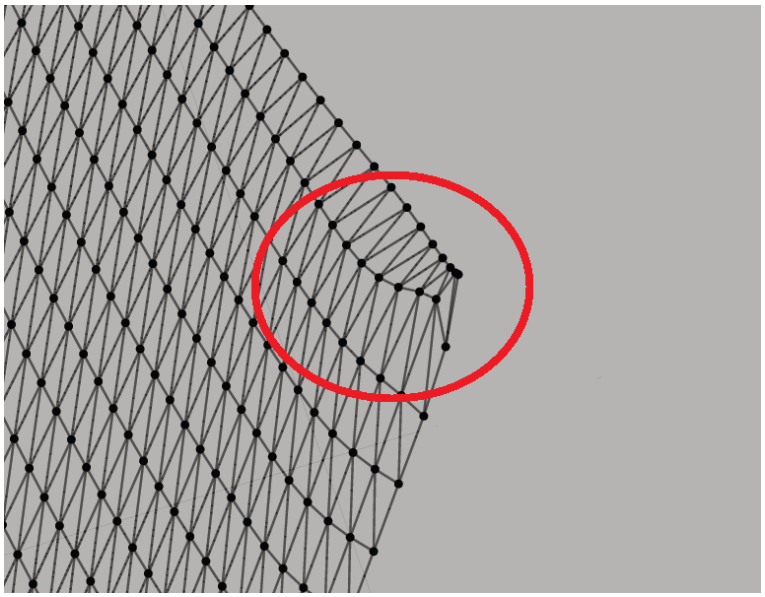
Obr. 8: Sieť bodov po 2500 iteráciach.



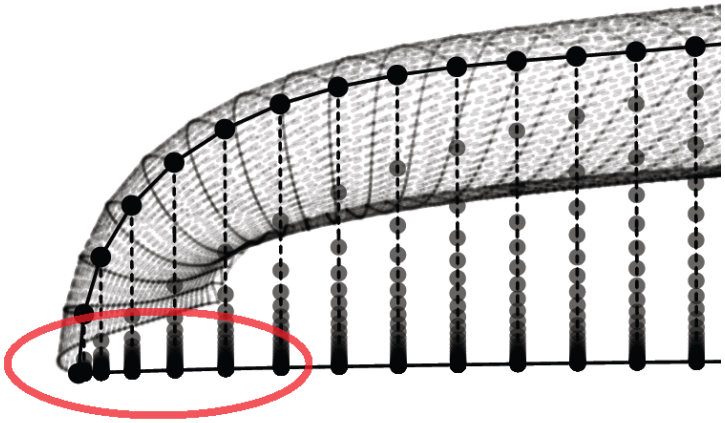
Obr. 9: Sieť bodov v čase $T = 0$.



Obr. 10: Sieť bodov po 2500 iteráciach.



Obr. 11: Pravý horný roh topánky.



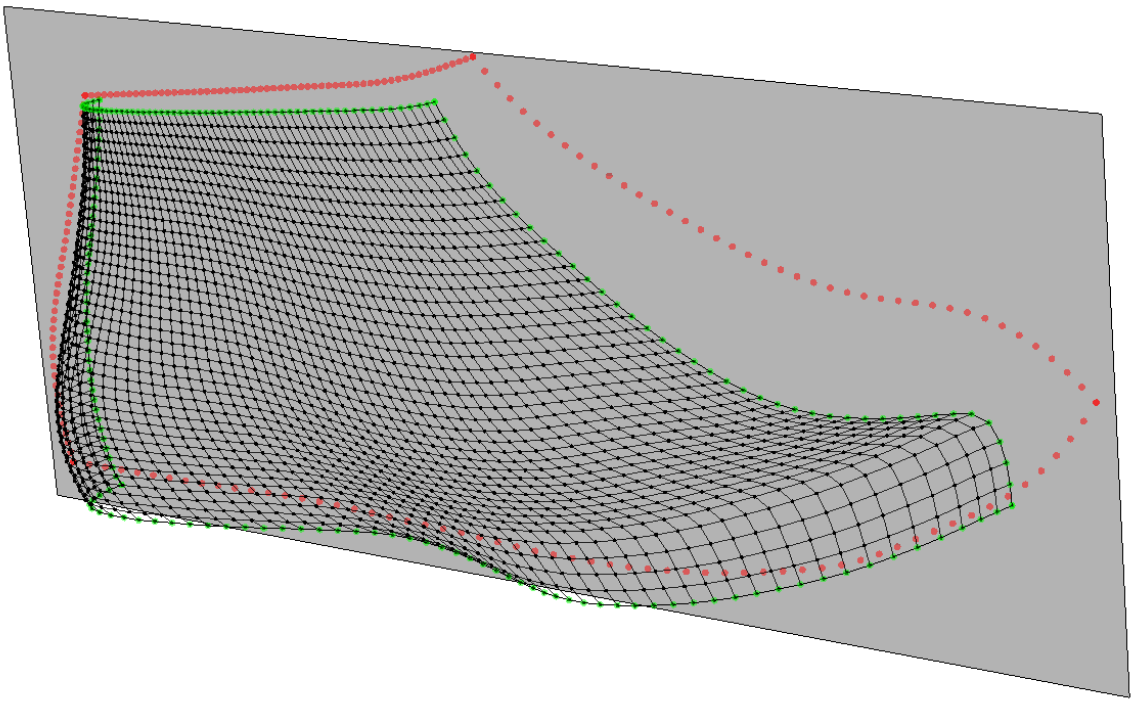
Obr. 12: Nerovnomerná distribúcia bodov na krajnej krivke po premietnutí do roviny.

3.4 Vývoj topánkovej plochy s rovnomernou redistribúciou bodov

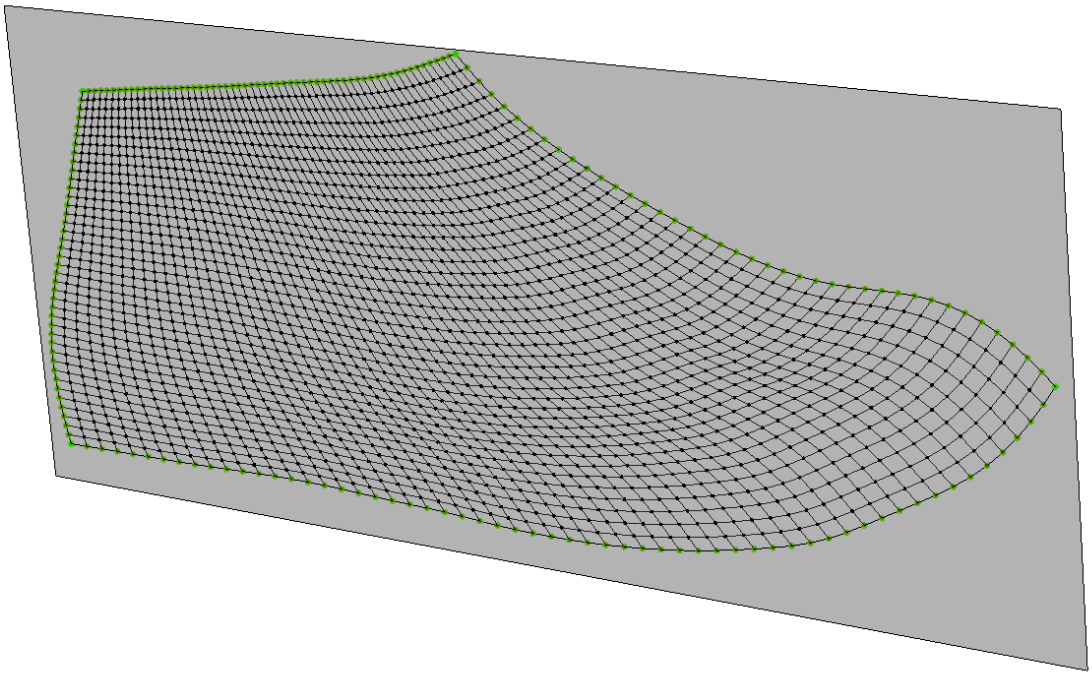
Metódy, ktoré popisujú pohyb priestorových kriviek pohybujúcich sa v smere krivosti odvodili K. Mikula a J. Urbán v prácach [7, 8] vychádzajúc z [2, 1]. Autori odvodili numerické schémy na pohyb kriviek tak aby sa zachovávala aspymptoticky rovnomerná redistribúcia bodov, krivky sa hýbali v smere krivosti a ktomu ešte aj v smere vhodne zvoleného vektorového poľa. Rovnomerná redistribúcia bola zabezpečená vhodnou voľbou tangenciálnej

rýchlosti, tak aby sa zachovávala priemerná vzdialenosť medzi bodmi na krivke. Autori využili tieto metódy na nájdenie ideálnej cesty pre kameru virtuálnej kolonoskopie.

My sme sa rozhodli využiť takýto prístup na pohyb kriviek popisujúcich povrch obuvníckeho kopyta. Sieť bude v tomto prípade štvoruholníková, pretože práca s krivkami popisujúcich povrch je v prípade takýchto sietí veľmi prirodzená. Krajné krivky(na Obr.13 vyznačené zelenou farbou) budeme hýbať smerom ku krajným líniam (vyznačené červenou farbou), ktoré ohraničujú nami požadovaný priemet. Tieto krajné krivky máme dané a boli získané experimentálne obuvníkmi, ktorí navrhujú topánky. Vnútorné krivky hýbeme v smere krivosti a vo vektorovom poli, ktoré smeruje do roviny priemetu. Výsledky máme možnosť vidieť na (Obr.14).



Obr. 13: Počiatočný stav. Povrch topánky je reprezentovaný štvoruholníkovou sieťou. Okraj topánky (zelené body) sa hýbu smerom k červenej hranici.



Obr. 14: Sieť bodov po 200 iteraciach.

4 Záver

Je potrebné povedať, že výsledky získané prvým prístupom (pohyb len v smere krivosti) nespĺňajú naše očakávania. Napríklad niektoré body v pravom hornom rohu topánky (Obr. 11) sa nehýbu tak ako by sme predpokladali. Príčin môže byť niekoľko. Takýto vývoj bodov je daný buď lokálnym charakterom siete, alebo to spôsobuje kumulácia bodov na krajných krivkách (Obr. 12). Navyše vnútorné body niesú rovnomerne rozdistribuované v priemete. Tieto problémy odstránil nový prístup v ktorom sme hýbali body v smere vhodne zvoleného vektorového poľa a navyše sme zabezpečili rovnomernú redistribúciu bodov. Na záver by sme chceli poznamenať, že takýto vývoj plôch sa dá využiť v rôznych iných aplikáciach.

Literatúra

[1] S. Kichenassamy, A. Kumar, P. Olver, A. Tannenbaum, A. Yezzi, *Conformal curvature fows: from phase transitions to active vision*, Arch. Rational Mech. Anal., 134 (1996), pp. 275 301.

[2] V. Caselles, R. Kimmel, G. Sapiro, *Geodesic active contours*, International Journal of Computer Vision, 22 (1997), pp. 61 79.

[3] R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin, *The finite volume method*, in: Handbook for Numerical Analysis, Vol.7 (Ph. Ciarlet, J.L. Lions, eds.), Elsevier, 2000

[4] G. Dziuk, C.M.Elliott, *Surface finite elements for parabolic equations*, Journal of Computational Mathematics, Vol. 25, No. 4 (2007) pp. 385-407

[5] M. Tunega, *Filtrácia geodetických dát na povrchu Zeme pomocou nelineárnych difúznych rovníc*, as Bachelor thesis, STU Bratislava, 2009.

[6] K. Mikula, R. Čunderlík, M. Tunega, *Filtrácia geodetických dát na povrchu Zeme pomocou nelineárnych difúznych rovníc*, in: MAGIA 2009 Proceedings, pp 21-35

[7] J. Urban, *Hľadanie ideálnej cesty pre kameru virtuálnej kolonoskopie*, in: Študentská vedecká konferencia, STU Bratislava 2011

[8] K.Mikula, J.Urban, *3D curve evolution algorithm with tangential redistribution for a fully automatic finding of an ideal camera path in virtual colonoscopy*, in: Proceedings of the Third International Conference on Scale Space Methods and Variational Methods in Computer Vision, May 29th - June 2nd, 2011, Ein Gedi, Dead Sea, Israel, Lecture Notes in Computer Science Series, Springer, 2011.